

Fit 하는 순간, 오답도 실력이 된다!

이지수능교육(ezeducation)

고3 2022년 11월
수학확통 오답노트플러스

이지오답핏



■ 문항별 분석

[illegible]

나의 오답 문항

고3 2022년 수능 수학확통 14번

이게 바로 핵심이야!

왜 틀렸지?

이것만은 기억하자!

문제

§ 세부단원정보 : 함수의 극한과 연속 | 함수의 연속 | 함수의 극한과 연속 합답형

001 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x) = \begin{cases} x & (x < -1 \text{ 또는 } x > 1) \\ f(x) & (-1 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

함수 $h(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(x+t) \times \lim_{t \rightarrow 2+} g(x+t)$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

- ㄱ. $h(1) = 3$
 ㄴ. 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
 ㄷ. 함수 $g(x)$ 가 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 감소하고 $g(-1) = -2$ 이면 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

§ 출전 : 고3 2009년 04월 학력평가 수학기형 11번

002 모든 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{x-1} & (|x| > 1) \\ \frac{a}{1-x} & (|x| < 1) \\ \frac{a}{2} & (|x| = 1) \end{cases}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a 는 실수이다.) [4점]

< 보 기 >

- ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 연속이다.
- ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 모든 실수에서 연속이 되도록 하는 a 의 값이 존재한다.
- ㄷ. 방정식 $f(x) = a$ 는 한 개의 실근을 갖는다. (단, $a \neq 0$)

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

§ 출전 : 2015년 E변형특강 수학B형 PART 2 40번

003 함수 $f(x) = \begin{cases} x+2 & (x < -1) \\ 0 & (x = -1) \\ x^2 & (-1 < x < 1) \\ x-2 & (x \geq 1) \end{cases}$ 에 대하여 다음 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

- ㄱ. 함수 $f(x) - |f(x)|$ 가 불연속인 점은 1개다.
- ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 1-0} \{f(x) + f(-x)\} = 0$
- ㄷ. 함수 $f(x)f(x-a)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되는 상수 a 는 없다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

나의 오답 문항

고3 2022년 수능 수학확통 21번

이게 바로 핵심이야!

왜 틀렸지?

이것만은 기억하자!

문제

§ 세부단원정보 : 지수함수와 로그함수 | 지수,로그 함수 통합 | 지수, 로그함수의 그래프의 활용

004 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} |3^{x+2} - n| & (x < 0) \\ |\log_2(x+4) - n| & (x \geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오.

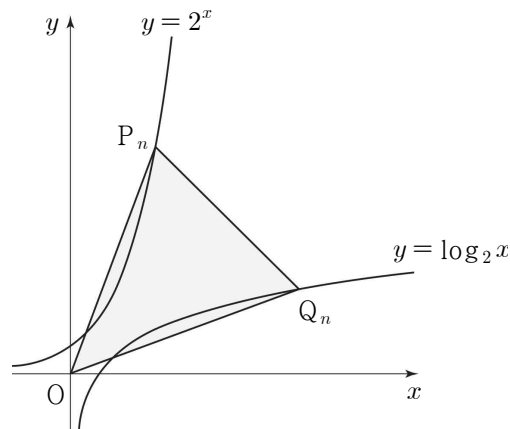
§ 출전 : 고3 2017년 04월 학력평가 수학과형 29번

005 좌표평면에서 2 이상의 자연수 n 에 대하여 두 곡선 $y = 3^x - n$, $y = \log_3(x + n)$ 으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x 좌표와 y 좌표가 모두 자연수인 점의 개수가 4가 되도록 하는 자연수 n 의 개수를 구하시오. [4점]

§ 출전 : 고3 2014년 04월 학력평가 수학과형 19번

006 그림과 같이 자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 곡선 $y = 2^x$ 위를 움직이는 점 $P_n(n, 2^n)$ 이 있다. 점 P_n 을 지나고 기울기가 -1 인 직선이 곡선 $y = \log_2 x$ 와 만나는 점을 Q_n 이라 하자.

삼각형 $P_n O Q_n$ 의 넓이를 S_n 이라 할 때, $2 \sum_{n=1}^5 S_n$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.) [4점]



- ① 1309 ② 1311 ③ 1313 ④ 1315 ⑤ 1317

나의 오답 문항

고3 2022년 수능 수학확통 29번

이게 바로 핵심이야!

왜 틀렸지?

이것만은 기억하자!

문제

§ 세부단원정보 : 확률 | 조건부확률 | 조건부 확률 (문장, 표)

007 앞면에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있고 뒷면에는 모두 0이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드가 그림과 같이 6 이하의 자연수 k 에 대하여 k 번째 자리에 자연수 k 가 보이도록 놓여 있다.



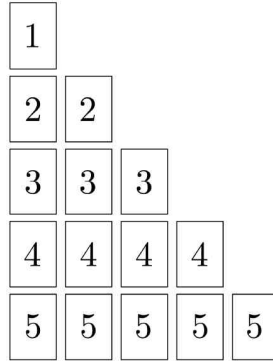
이 6장의 카드와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k 이면 k 번째 자리에 놓여 있는 카드를 한 번 뒤집어 제자리에 놓는다.

위의 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수일 때, 주사위의 1의 눈이 한 번만 나왔을 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

§ 출전 : 고3 2021년 07월 학력평가 수학확통 29번

008 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적힌 카드가 각각 1장, 2장, 3장, 4장, 5장이 있다. 이 15장의 카드 중에서 임의로 2장의 카드를 동시에 선택하는 시행을 한다. 이 시행에서 선택한 2장의 카드에 적힌 두 수의 곱의 모든 양의 약수의 개수가 3이하일 때, 그 두 수의 합이 짝수일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



§ 출전 : 고3 2021년 수능 수학확통 30번

009 흰 공과 검은 공이 각각 10개 이상 들어 있는 바구니와 비어 있는 주머니가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져
 나온 눈의 수가 5 이상이면
 바구니에 있는 흰 공 2개를 주머니에 넣고,
 나온 눈의 수가 4 이하이면
 바구니에 있는 검은 공 1개를 주머니에 넣는다.

위의 시행을 5번 반복할 때, $n(1 \leq n \leq 5)$ 번째 시행 후 주머니에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 a_n , b_n 이라 하자. $a_5 + b_5 \geq 7$ 일 때, $a_k = b_k$ 인 자연수 $k(1 \leq k \leq 5)$ 가 존재할 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



정답과 해설

1 정답 ①

출제의도 : 극한으로 표현된 함수에 대하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } x > 1 \text{에서 } g(x) &= x \text{이므로} \\ h(1) &= \lim_{t \rightarrow 0+} g(1+t) \times \lim_{t \rightarrow 2+} g(1+t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} (1+t) \times \lim_{t \rightarrow 2+} (1+t) \\ &= 1 \times 3 \\ &= 3 \text{ (참)} \end{aligned}$$

$$\text{ㄴ. } h(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(x+t) \times \lim_{t \rightarrow 2+} g(x+t)$$

이므로

$$x < -3 \text{일 때 } h(x) = x \times (x+2)$$

$$x = -3 \text{일 때 } h(-3) = -3 \times f(-1)$$

$$-3 < x < -1 \text{일 때 } h(x) = x \times f(x+2)$$

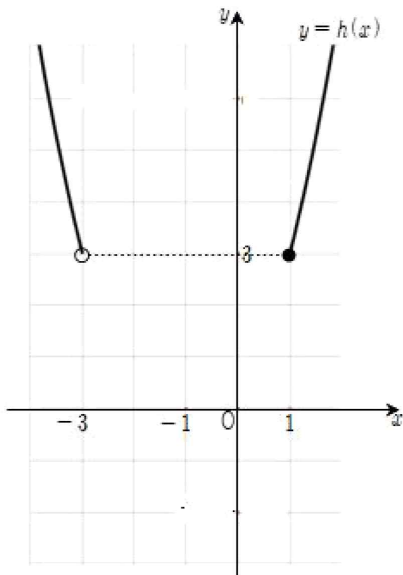
$$x = -1 \text{일 때 } h(-1) = f(-1) \times 1$$

$$-1 < x < 1 \text{일 때 } h(x) = f(x) \times (x+2)$$

$$x = 1 \text{일 때 } h(1) = 1 \times 3$$

$$x > 1 \text{일 때 } h(x) = x \times (x+2)$$

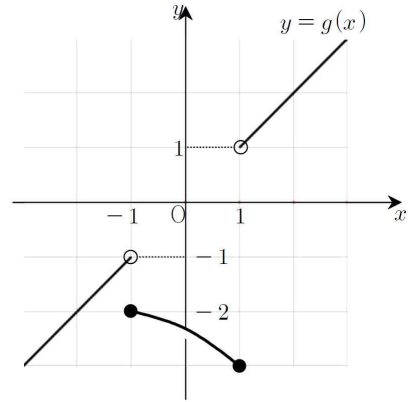
즉, $x < -3$ 또는 $x \geq 1$ 일 때, 함수 $y = h(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$f(-3) \neq 3$ 이면 함수 $h(x)$ 는 $x = -3$ 에서 불연속이다.

즉, 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이라 할 수 없다. (거짓)

ㄷ. 함수 $g(x)$ 가 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 감소하고 $g(-1) = -2$ 일 때, 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



이때,

$$h(-3) = -3 \times f(-1) = -3 \times (-2) = 6$$

$$h(-1) = f(-1) \times 1 = -2 \times 1 = -2$$

이다.

$$-3 < x < -1 \text{에서 } h(x) > 0$$

또 $-1 < x < 1$ 에서

$$h(x) = f(x) \times (x+2) \text{이므로}$$

$$h'(x) = f'(x) \times (x+2) + f(x)$$

$$f'(x) < 0, x+2 > 0, f(x) < 0 \text{이므로}$$

$$h'(x) < 0$$

즉, $-1 < x < 1$ 에서 함수 $h(x)$ 는 감소하고, $f(1) = 3$ 이므로

함수 $h(x)$ 는 최솟값을 갖지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

[다른 풀이]

ㄴ. <반례>

$$f(x) = 2 \text{라 하자.}$$

$$-3 < x < -1 \text{일 때, } h(x) = x \times 2 = 2x$$

$$x = -1 \text{일 때, } h(x) = 2 \times 1 = 2$$

$$-1 < x < 1 \text{일 때, } h(x) = 2(x+2)$$

이때,

$$\lim_{x \rightarrow -1-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} 2x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} 2(x+2) = 2$$

$$h(-1) = 2$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1+} h(x)$$

이다.

즉, 함수 $h(x)$ 는 $x = -1$ 에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. <반례>

$$f(x) = -x-3 \text{이라 하자.}$$

$$x < -3 \text{일 때, } h(x) = x(x+2)$$

$$x = -3 \text{일 때, } h(x) = -3 \times (-2) = 6$$

$$-3 < x < -1 \text{일 때,}$$

$$h(x) = x \times \{-(x+2)-3\} = -x(x+5)$$

$$x = -1 \text{일 때, } h(-1) = -2 \times 1 = -2$$

$$-1 < x < 1 \text{일 때,}$$

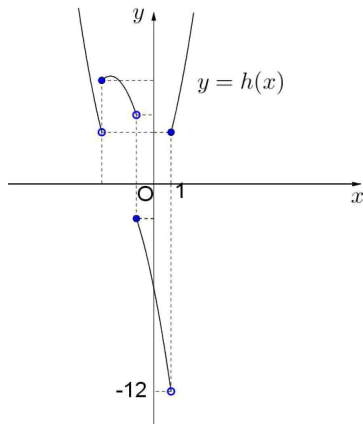
$$h(x) = (-x-3) \times (x+2) = -(x+3)(x+2)$$

$$x = 1 \text{일 때, } h(x) = 1 \times 3 = 3$$

$x > 1$ 일 때, $h(x) = x(x+2)$

이때, $\lim_{x \rightarrow 1-} h(x) = -12$, $h(1) = 3$ 이므로

함수 $h(x)$ 의 최솟값은 없다. (거짓)

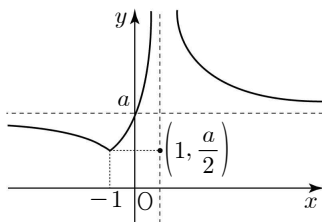


2 [정답] ⑤

[출제의도] 함수의 연속성 이해하기

[해설] i) $a = 0$ 인 경우, $f(x) = 0$

ii) $a > 0$ 인 경우



iii) $a < 0$ 인 경우

ii)의 그래프를 x 축으로 대칭이동한 그래프이다.

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = \frac{a}{2}$ (참)

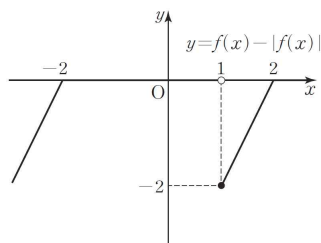
ㄴ. $a = 0$ 일 때, 함수 $f(x) = 0$ 이므로 모든 실수에서 연속이다. (참)

ㄷ. $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = a$ 와 오직 한 점에서 만난다. (참)

3 [정답] ①

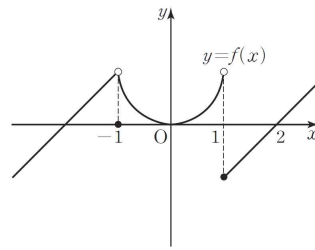
ㄱ. $f(x) - |f(x)| = \begin{cases} 0 & (f(x) \geq 0) \\ 2f(x) & (f(x) < 0) \end{cases}$ 이므로

함수 $y = f(x) - |f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

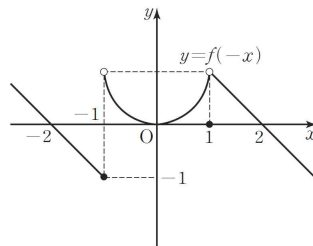


함수 $f(x) - |f(x)|$ 는 $x = 1$ 에서만 불연속이므로 불연속인 점은 1개. (참)

ㄴ. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y = f(-x)$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것으로 다음 그림과 같다.

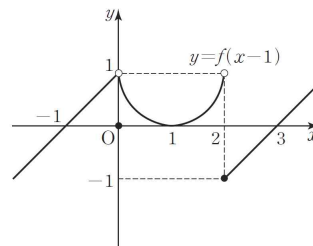


$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1-0} \{f(x) + f(-x)\} &= \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-0} f(-x) \\ &= 1 + 1 = 2 \quad (\text{거짓}) \end{aligned}$$

ㄷ. [반례] $a = 1$ 을 대입하면

함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 함수

$y = f(x-1)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y = f(x)$ 는 $x = -1$, $x = 1$ 에서 불연속이고, 함수

$y = f(x-1)$ 은 $x = 0$, $x = 2$ 에서 불연속이다.

(i) $x = -1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x)f(x-1) &= \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x)f(x-1) \\ &= f(-1)f(-2) = 0 \end{aligned}$$

이므로 $x = -1$ 에서 연속

(ii) $x = 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -0} f(x)f(x-1) &= \lim_{x \rightarrow +0} f(x)f(x-1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} f(x)f(x-1) = f(0)f(-1) = 0 \end{aligned}$$

이므로 $x = 0$ 에서 연속

(iii) $x = 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)f(x-1) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x)f(x-1) \\ &= f(1)f(0) = 0 \text{이므로 } x = 1 \text{에서} \end{aligned}$$

연속

(iv) $x = 2$ 일 때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x)f(x-1) &= \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x)f(x-1) \\ &= f(2)f(1) = 0 \end{aligned}$$

이므로 $x=2$ 에서 연속

(i), (iv)에서 함수 $f(x)f(x-1)$ 은 실수 전체의 집합에서 연속이므로 상수 a 가 존재한다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

4 정답 33

출제의도 : 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수의 값의 합을 구할 수 있는가?

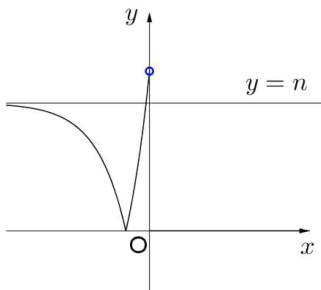
정답풀이 :

함수 $y=3^{x+2}-n$ 의 그래프는 함수 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

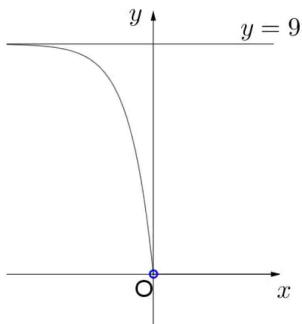
함수 $y=|3^{x+2}-n|$ 의 그래프는 점 $(0, |9-n|)$ 을 지나고 점근선의 방정식은 $y=n$ 이다.

$x < 0$ 일 때, 자연수 n 의 값에 따른 함수 $y=|3^{x+2}-n|$ 의 그래프는 다음과 같다.

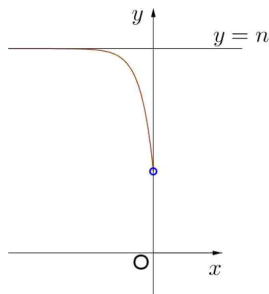
$1 \leq n < 9$ 일 때,



$n = 9$ 일 때,



$n > 9$ 일 때,



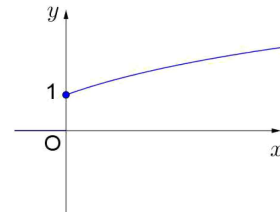
또, 함수 $y=\log_2(x+4)-n$ 의 그래프는 함수 $y=\log_2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행 이동한 그래프이다.

함수 $y=|\log_2(x+4)-n|$ 의 그래프는 점 $(0, |2-n|)$ 을

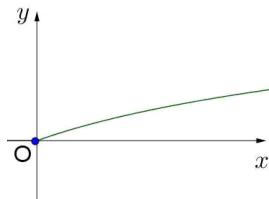
지나고 점근선의 방정식은 $x=-4$ 이다.

$x \geq 0$ 일 때, 자연수 n 의 값에 따른 함수 $y=|\log_2(x+4)-n|$ 의 그래프는 다음과 같다.

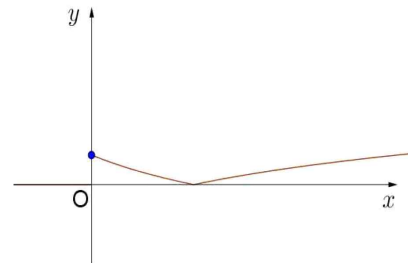
$n=1$ 일 때,



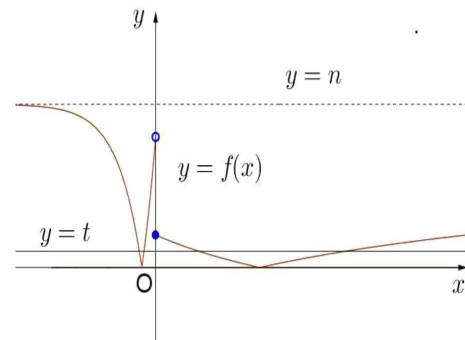
$n=2$ 일 때,



$n > 2$ 일 때,



x 에 대한 방정식 $f(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수 $g(t)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는 점의 개수와 같다.



함수 $g(t)$ 의 최댓값이 4이므로

$9-n > 0$ 이고 $2-n < 0$ 이어야 한다.

즉, $2 < n < 9$ 이다.

따라서 자연수 n 의 값은

3, 4, 5, 6, 7, 8

이고, 그 합은

$3+4+5+6+7+8=33$

이다.

5 [정답] 16

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 활용하여 추론하기

두 곡선 $y=3^x-n$, $y=\log_3(x+n)$ 은 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 점 (a, b) 가 주어진 영역에 포함되면 점 (b, a) 도 포함된다.

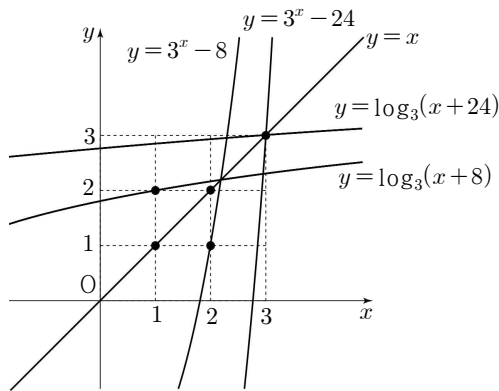
영역의 내부 또는 경계에 포함되는 점의 개수가 4일 때의 네 점은 $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$ 이다.

$f(x)=3^x-n$ 이라 할 때, $f(2)\leq 1$, $f(3)>3$ 이어야 한다.

$$3^2-n\leq 1, 3^3-n>3$$

$$\therefore 8\leq n<24$$

따라서 자연수 n 의 개수는 16



6 [정답] ①

[출제의도] 여러 가지 수열을 활용하여 문제해결하기

함수 $y=\log_2 x$ 는 함수 $y=2^x$ 의 역함수이므로

점 Q_n 의 좌표는 $(2^n, n)$

직선 P_nQ_n 의 방정식은 $x+y-2^n-n=0$ 이고,

원점 O 와 직선 P_nQ_n 사이의 거리는 $\frac{2^n+n}{\sqrt{2}}$,

선분 P_nQ_n 의 길이는 $\sqrt{2}(2^n-n)$ ($\because 2^n>n$)

$$\therefore S_n = \frac{1}{2} \times \frac{2^n+n}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}(2^n-n)$$

$$= \frac{4^n-n^2}{2}$$

$$\text{따라서 } 2 \sum_{n=1}^5 S_n = \sum_{n=1}^5 (4^n-n^2)$$

$$= \frac{4(4^5-1)}{4-1} - \frac{5 \times 6 \times 11}{6}$$

$$= 1309$$

7 정답 49

출제의도 : 조건부확률을 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수인 사건을 A , 주사위의 1의 눈이 한 번만 나오는 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

(i) 사건 A 가 일어날 확률

주어진 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수인 경우는 홀수가 보이는 카드의 개수가 0 또는 2이어야 하므로 주사위를 3번 던질 때 홀수의 눈이 나오는 횟수가 3 또는 1이어야 한다.

이때 독립시행의 확률에 의하여 홀수의 눈이 3번 나올 확률은

$${}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 \times \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{8} \dots\dots \textcircled{7}$$

홀수의 눈이 1번 나올 확률은

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{8} \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧의 두 사건은 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$P(A) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{1}{2}$$

(ii) 사건 $A \cap B$ 가 일어날 확률

⑦에서 1의 눈이 한 번만 나오는 경우는 3번의 시행 중 1의 눈이 한 번 나오고 나머지 두 번은 3 또는 5의 눈이 나오는 경우이므로 이 확률은

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times {}_2C_2 \left(\frac{2}{6}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{6} \times 1 \times \frac{1}{9}$$

$$= \frac{1}{18}$$

⑧에서 1의 눈이 한 번만 나오는 경우는 3번의 시행 중 1의 눈이 한 번 나오고 나머지 두 번은 짝수의 눈이 나오는 경우이므로 이 확률은

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times {}_2C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{6} \times 1 \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{8}$$

따라서

$$P(A \cap B) = \frac{1}{18} + \frac{1}{8} = \frac{13}{72}$$

(i), (ii)에서 구하는 조건부확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\frac{\frac{13}{72}}{\frac{1}{2}} = \frac{13}{36}$$

이므로

$$p+q=36+13=49$$

8 정답: 25

[출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제해결하기

두 수의 곱의 모든 양의 약수의 개수가 3이하인 사건을 X , 두 수의 합이 짝수인 사건을 Y 라 하자. 사건 X 를 만족시키는 경우는 두 수 중 하나가 1이거나 두 수가 같은 소수일 때이다.

(i) 두 수 중 하나가 1일 때

$$\frac{{}_1C_1 \times {}_{14}C_1}{{}_{15}C_2} = \frac{2}{15}$$

(ii) 두 수가 같은 소수일 때

(1) 두 수가 2일 때

$$\frac{{}_2C_2}{{}_{15}C_2} = \frac{1}{105}$$

(2) 두 수가 3일 때

$$\frac{{}_3C_2}{{}_{15}C_2} = \frac{1}{35}$$

(3) 두 수가 5일 때

$$\frac{{}_5C_2}{{}_{15}C_2} = \frac{2}{21}$$

(i), (ii)에 의하여 $P(X) = \frac{4}{15}$

두 사건 X 와 Y 를 동시에 만족시키는 경우는 (i)에서 두 수가 1, 3이거나 두 수가 1, 5인 경우 또는 (ii)인 경우이므로

$$\begin{aligned} P(X \cap Y) &= \frac{{}_1C_1 \times {}_3C_1 + {}_1C_1 \times {}_5C_1 + {}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_5C_2}{{}_{15}C_2} \\ &= \frac{22}{105} \end{aligned}$$

$$P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{11}{14}$$

따라서 $p+q=25$

9 정답 191

출제의도 : 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_5 + b_5 \geq 7$ 인 사건을 A , $a_k = b_k$ 인 자연수 $k(1 \leq k \leq 5)$ 가 존재하는 사건을 B 라 하자.

사건 A 가 일어나는 경우는

$$a_5 + b_5 = 7 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1$$

$$a_5 + b_5 = 8 = 2 + 2 + 2 + 1 + 1$$

$$a_5 + b_5 = 9 = 2 + 2 + 2 + 2 + 1$$

$$a_5 + b_5 = 10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

이고 주사위의 눈의 수가 5이상일 확률은 $\frac{1}{3}$, 4이하일

확률은 $\frac{2}{3}$ 이므로

(i) $a_5 + b_5 = 7$ 일 확률은

$${}_5C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 10 \times \frac{8}{3^5}$$

(ii) $a_5 + b_5 = 8$ 일 확률은

$${}_5C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 10 \times \frac{4}{3^5}$$

(iii) $a_5 + b_5 = 9$ 일 확률은

$${}_5C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = 5 \times \frac{2}{3^5}$$

(iv) $a_5 + b_5 = 10$ 일 확률은

$${}_5C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{3^5}$$

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여

$$P(A) = 10 \times \frac{8}{3^5} + 10 \times \frac{4}{3^5} + 5 \times \frac{2}{3^5} + \frac{1}{3^5}$$

또한, 사건 $A \cap B$ 인 경우는 (i), (ii)의 경우 3번째 시행까지 5이상의 눈의 수가 1번, 4이하의 눈의 수가 2번 일어나야 하고 (iii), (iv)인 경우는 사건 $A \cap B$ 는 일어나지 않는다.

$P(A \cap B)$

$$\begin{aligned} &= {}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times {}_2C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) + {}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= 3 \times \frac{16}{3^5} + 3 \times \frac{4}{3^5} \end{aligned}$$

그러므로, 구하는 확률은

$P(B|A)$

$$\begin{aligned} &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{3 \times \frac{16}{3^5} + 3 \times \frac{4}{3^5}}{10 \times \frac{8}{3^5} + 10 \times \frac{4}{3^5} + 5 \times \frac{2}{3^5} + \frac{1}{3^5}} \\ &= \frac{48 + 12}{80 + 40 + 10 + 1} \\ &= \frac{60}{131} \end{aligned}$$

이므로

$$p = 131, q = 60$$

따라서, $p+q = 131+60 = 191$